

Compensation paramétrique

- Dernière fois
 - Analyse de résultats - théorie $Q_{\hat{x}\hat{x}}$, $Q_{\hat{v}\hat{v}}$, $Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$
 - Promis plus sur l'itération

- Aujourd'hui
 1. Encore l'analyse de résultats
 - Global, local et la signifiante des paramètres

 2. Les pièges de l'itération
 - Générale
 - Exemple de sinusoïde

Compensation paramétrique – Ecarte-type *a posteriori*

11. Ecarte-type *a posteriori* (Sec 4.5) – estimateur non-biaisé

- Similitudes avec compensation conditionnelle:
 - minimum – **somme des résidus carrés** $\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \longrightarrow \min.$
 - **surdétermination** – (pour la moyenne $r = n - 1$)
- Différences
 - Surdétermination exprimée:
 - la différence entre le nombre de observations et le nombre de paramètres
 $r = n - u \geq 0$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{n-u}}$$

Ecarte-type *a posteriori*

- l'idée de dérivation (idem la compensation conditionnelle)
- On espère obtenir $E\{\hat{\Omega}\} = E\{trace(\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}})\} = \dots$
 - On fait usage de
 - la trace - un opérateur commutatif
 - $\mathbf{P}$ – pas stochastique $\rightarrow$ à l'extérieur d'espérance
 - $E\{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}\} = \sigma_0^2 \cdot trace(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}}) = \sigma_0^2 \cdot trace(\mathbf{P} \cdot \underbrace{[\mathbf{Q}_{\ell\ell} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^T]}_{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}}})$
 - $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^T$
 - $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$
 - $\vdots$
 - $E\{\hat{\Omega}\} = \sigma_0^2 \cdot (trace(\underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell}}_{\mathbf{I}_n})) - \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1})}_{\mathbf{I}_u}$
 - $\vdots$
 - Si le résultat = espérance

$= \sigma_0^2 \cdot (n - u)$

$\Rightarrow$

$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{(n-u)}}$

$\Rightarrow r = (n - u)$

12. Globale (déjà vu)

- Comme dans la compensation conditionnelle:
- Ou directement via $\mathbf{K}_{\ell\ell}$

$$q_{glb} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0}$$

$$q_{glb} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{K}_{\ell\ell}^{-1} \hat{\mathbf{v}}}{r}}$$

13. Locale

- (déjà vu) $\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\ell_i}}$ où σ_{ℓ_i} est issu de $\mathbf{K}_{\ell\ell}/\mathbf{Q}_{\ell\ell}$
- Résidu standardisé (à tester k = ...)
 - définition $\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}}$
 - **attention** - joli mais délicat (plus de détails à ce sujet dans la Ch. 5 – fiabilité)
- (nouveau) - **paramètre significatif**
 - à tester: $\frac{\hat{x}_j}{\sigma_{\hat{x}_j}}$

Nous aimons les paramètres significatifs, nous voulons que ce quotient soit important, pour une raison précise !

Compensation paramétrique – Analyse paramètre significatif

■ Exemple de sinusoïde

- Trois ou quatre paramètres ?
- Cas n°3 (c) versus n°4 (d)

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{A} \\ \hat{\omega} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{A} \\ \hat{\Omega} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix}$$

$\approx 24.11 \text{ h}$ $\rightarrow$ $\hat{\omega}$ $\rightarrow$ $\hat{\Omega}$ $\leftarrow$ fixé à 24

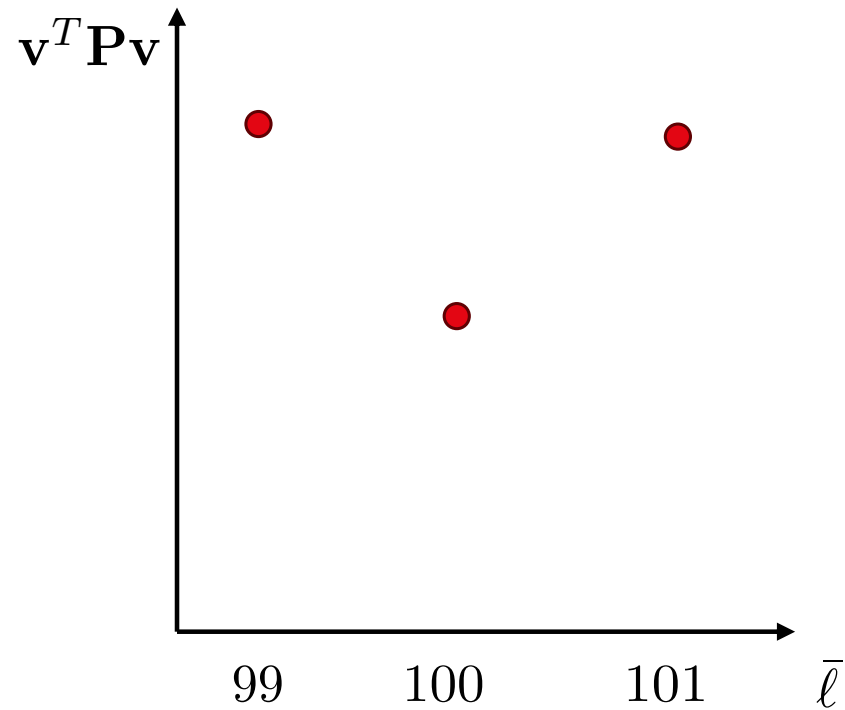
$$\frac{\hat{T} - 24}{\sigma_{\hat{T}}} = \frac{24.11 - 24}{0.07} = \frac{0.11}{0.07} \approx 1.5 \leq 2 \text{ à } 3$$

Nous n'intéressons pas à la différence entre T et son écart-type, mais à la différence entre T et 24 heures !

Linéarisation – cas particulier

- Moyenne arithmétique (ME 6-3)

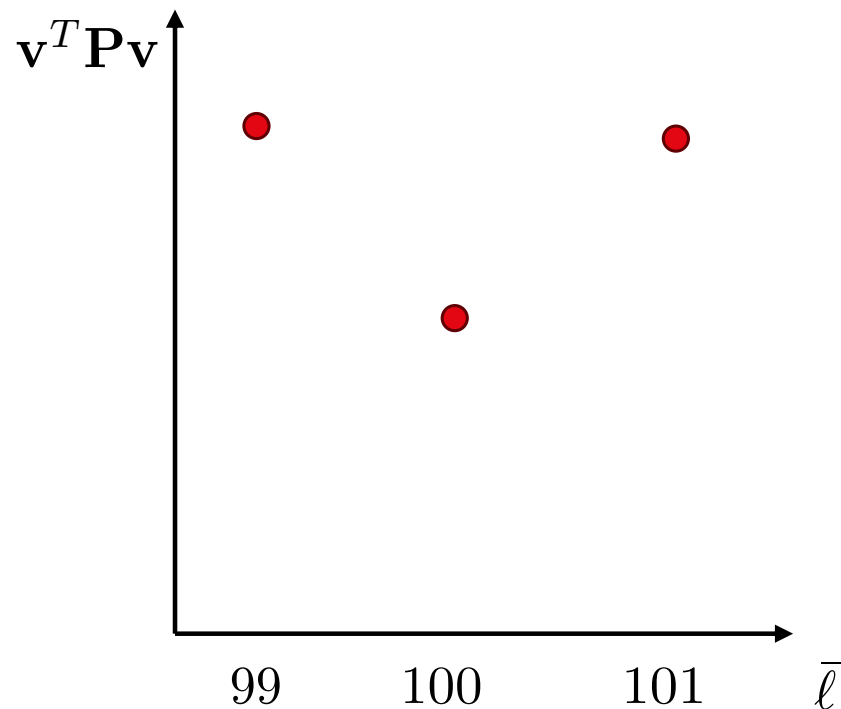
$$\ell = \begin{bmatrix} 101 & 96 & 102 & 99 & 102 \end{bmatrix}$$



Linéarisation – cas particulier

- Moyenne arithmétique (ME 6-3)

$$\ell = \begin{bmatrix} 101 & 96 & 102 & 99 & 102 \end{bmatrix}$$



- Application

- Exo 10 sinusoïde – cas 1(a)
 $y = c$

- triangle
- quadrilatère (démonstration!)
- :

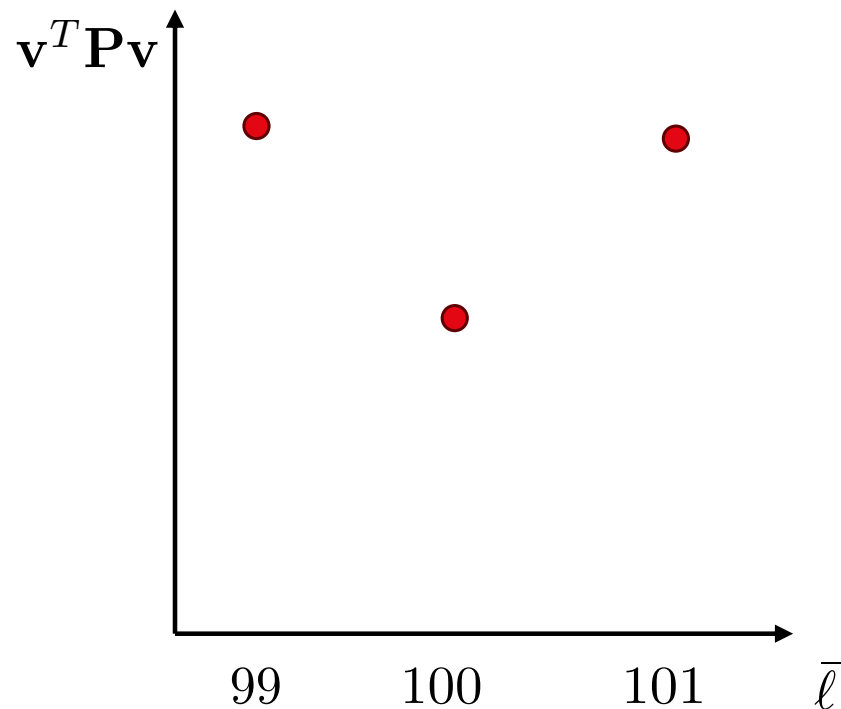
- Cas (.py sur Moodle)

1. par. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}^T$
 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma & \delta \end{bmatrix}^T$
2. par. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$
 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sum \alpha/2 & \sum \beta/2 & \gamma \end{bmatrix}^T$
3. par. idem
 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
4. par. idem, pas d'approximation

Linéarisation – cas particulier

- Moyenne arithmétique (ME 6-3)

$$\ell = \begin{bmatrix} 101 & 96 & 102 & 99 & 102 \end{bmatrix}$$



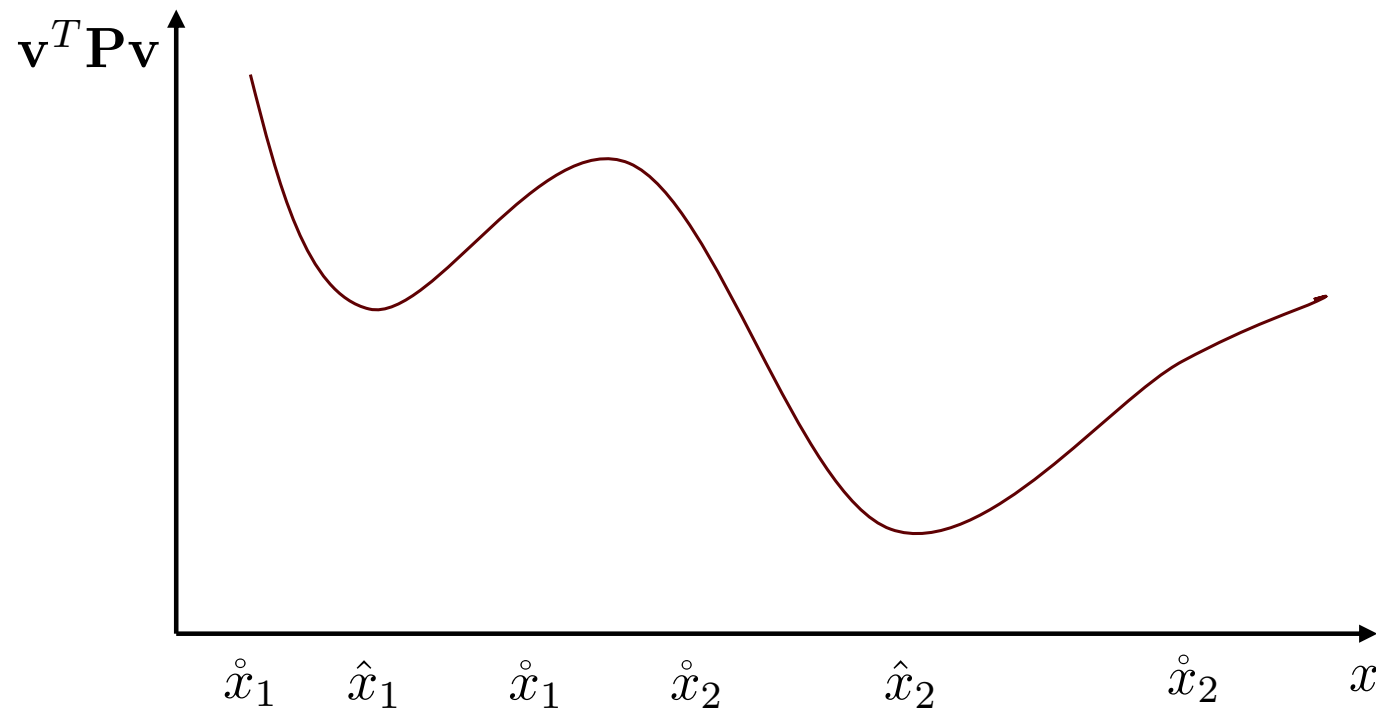
- Application

- Exo 10 sinusoïde – cas 1(a)
 $y = c$
- triangle
- quadrilatère (démonstration!)
- :
- *toutes les relations linéaires*

- Morale

- approximation n'est pas nécessaire
- ou peut-être n'importe laquelle

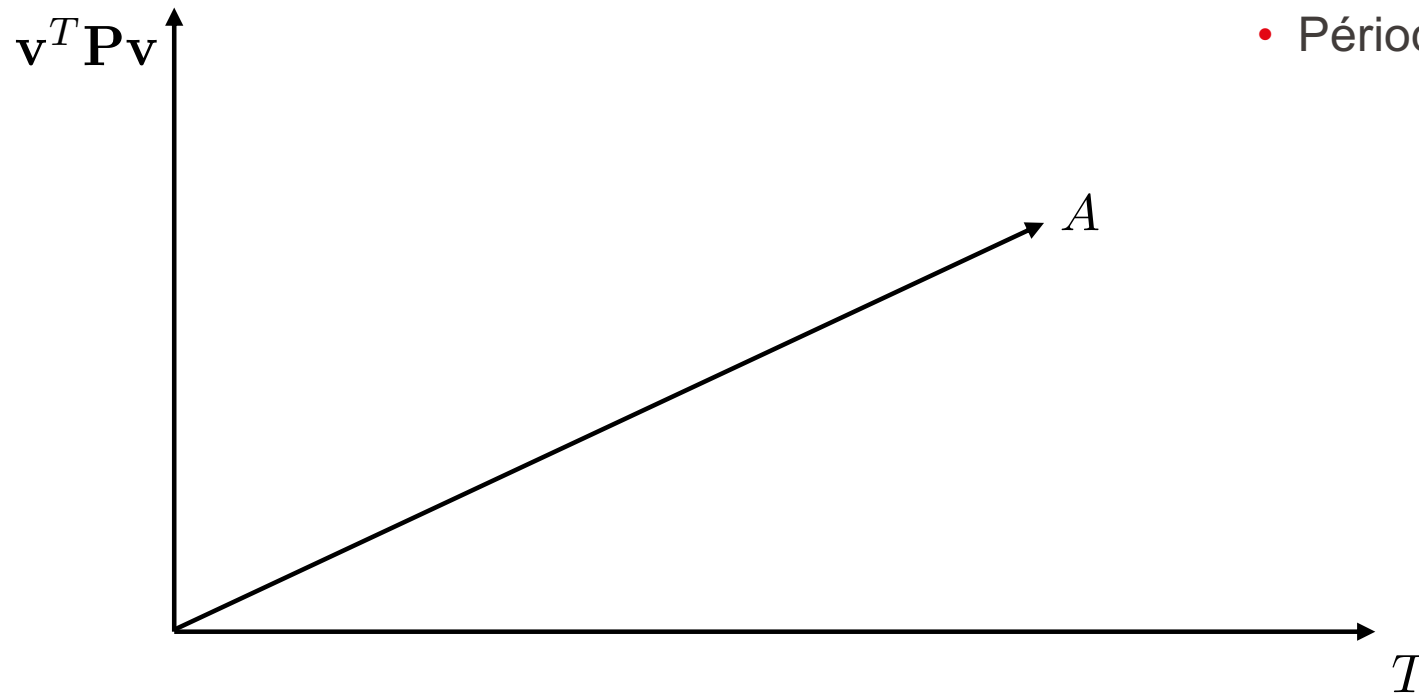
- Fonction d'une variable



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

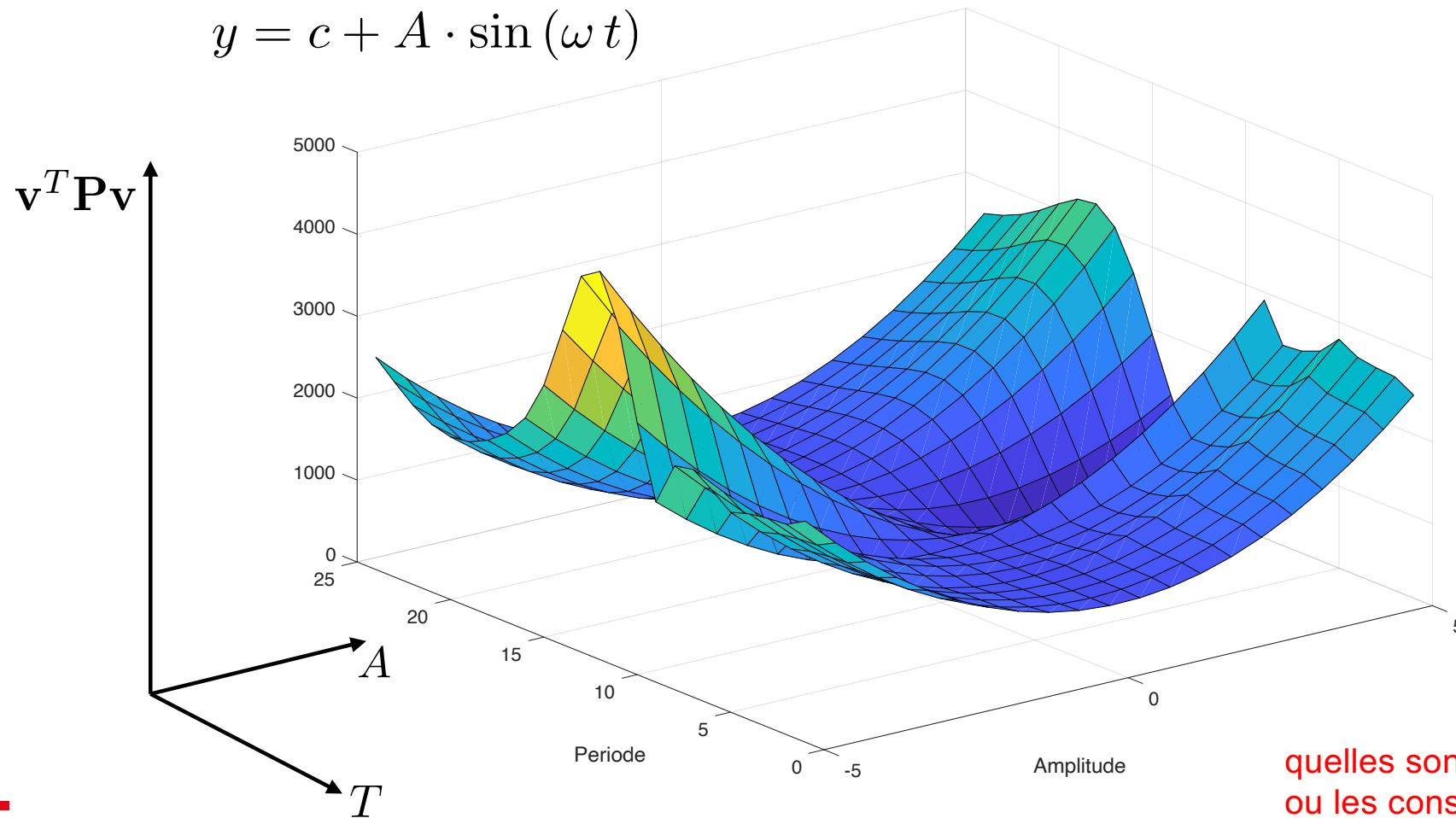
$$y = c + A \cdot \sin(\omega t)$$

- Fonction deux paramètres
 - (constant est connue, fixé)
 - **A**mplitude
 - Période (**T**emps en heures)



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c + A \cdot \sin(\omega t)$$



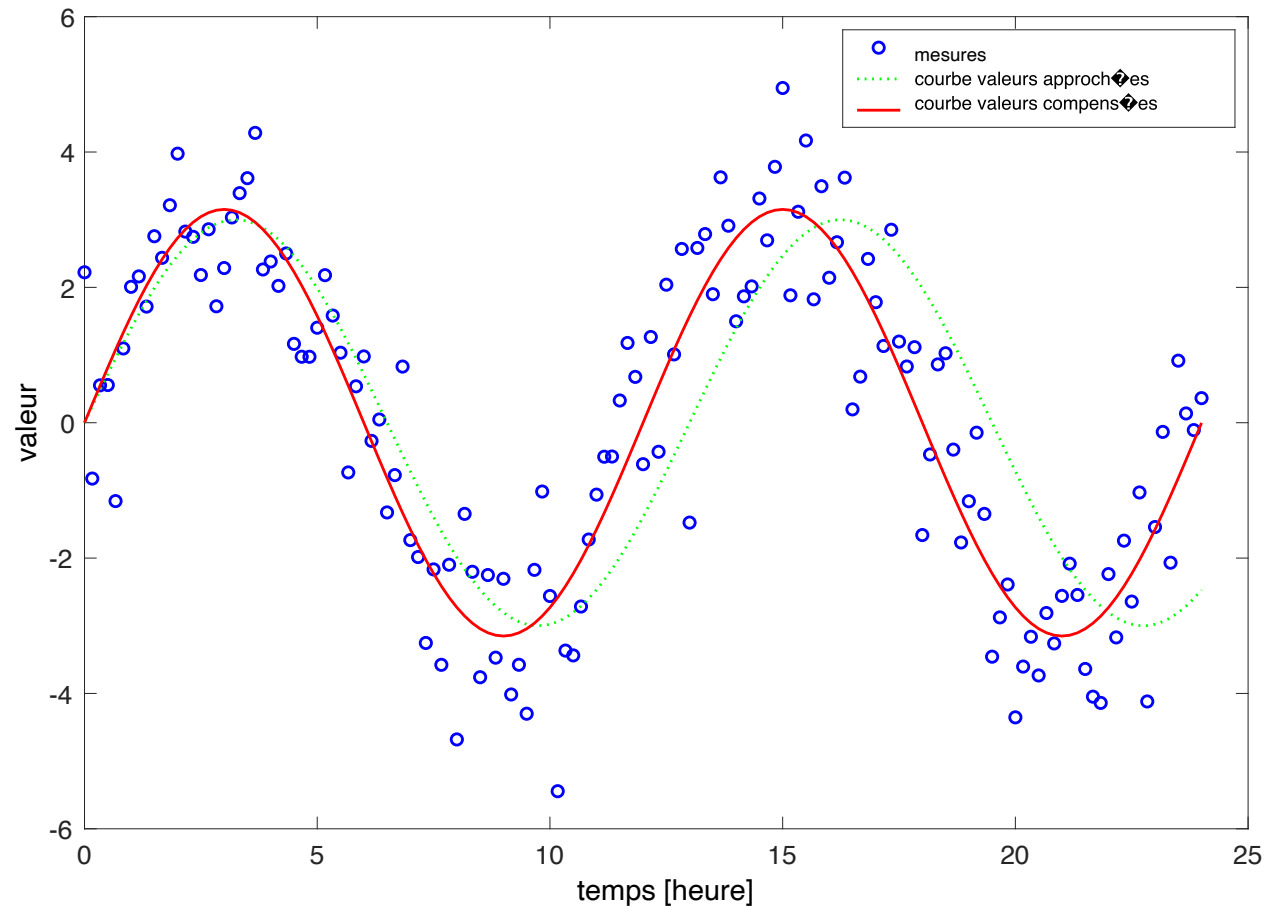
quelles sont les implications /
ou les conséquences ?

Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega t)$$

85

$\hat{\mathbf{x}} = \text{Amplitude} = 3, \text{période} = 14$



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

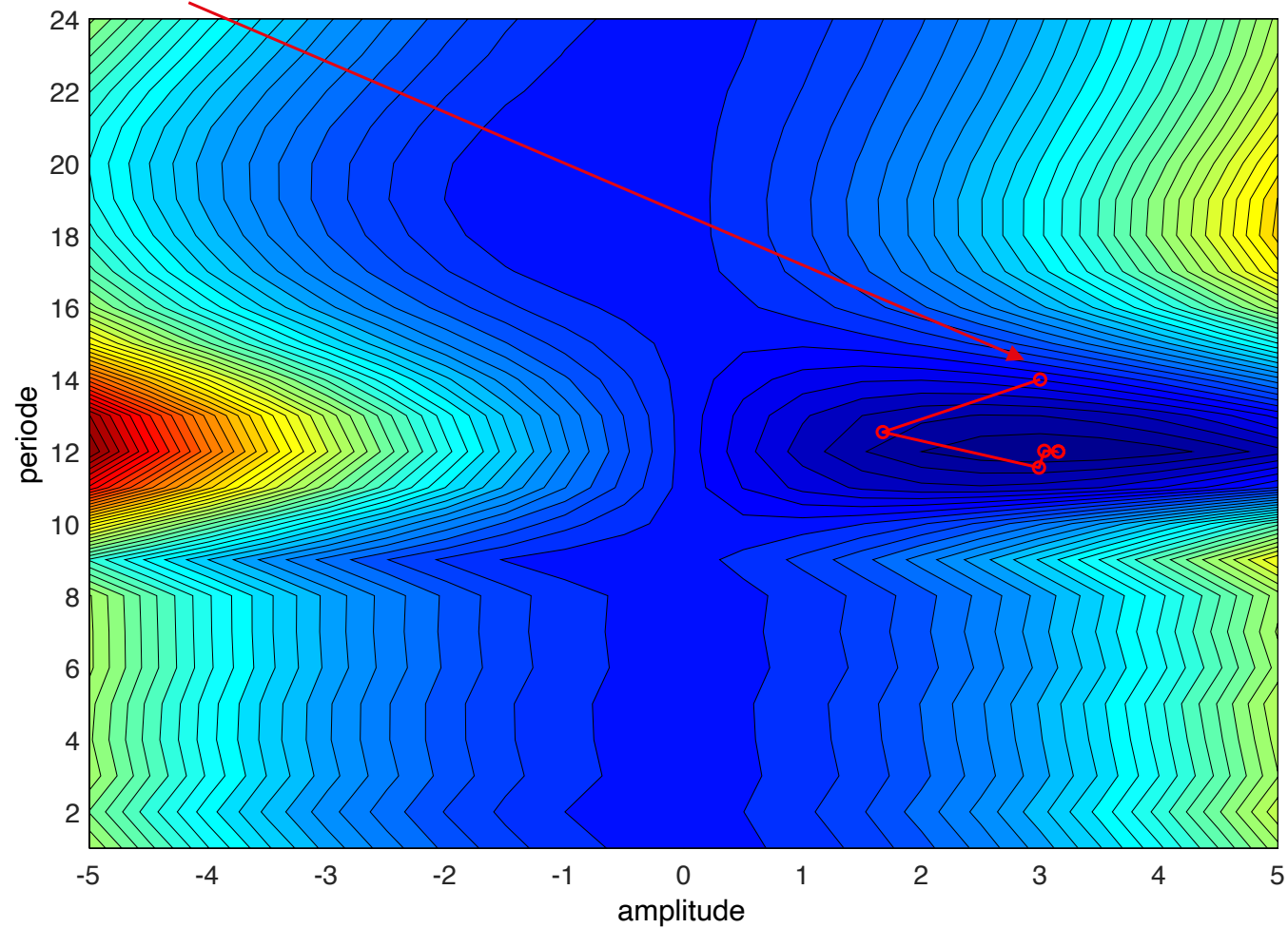
$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega t)$$

86

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$$

en couleur
(courbes = isolignes)

$\hat{\mathbf{x}} = \text{Amplitude} = 3, \text{période} = 14$

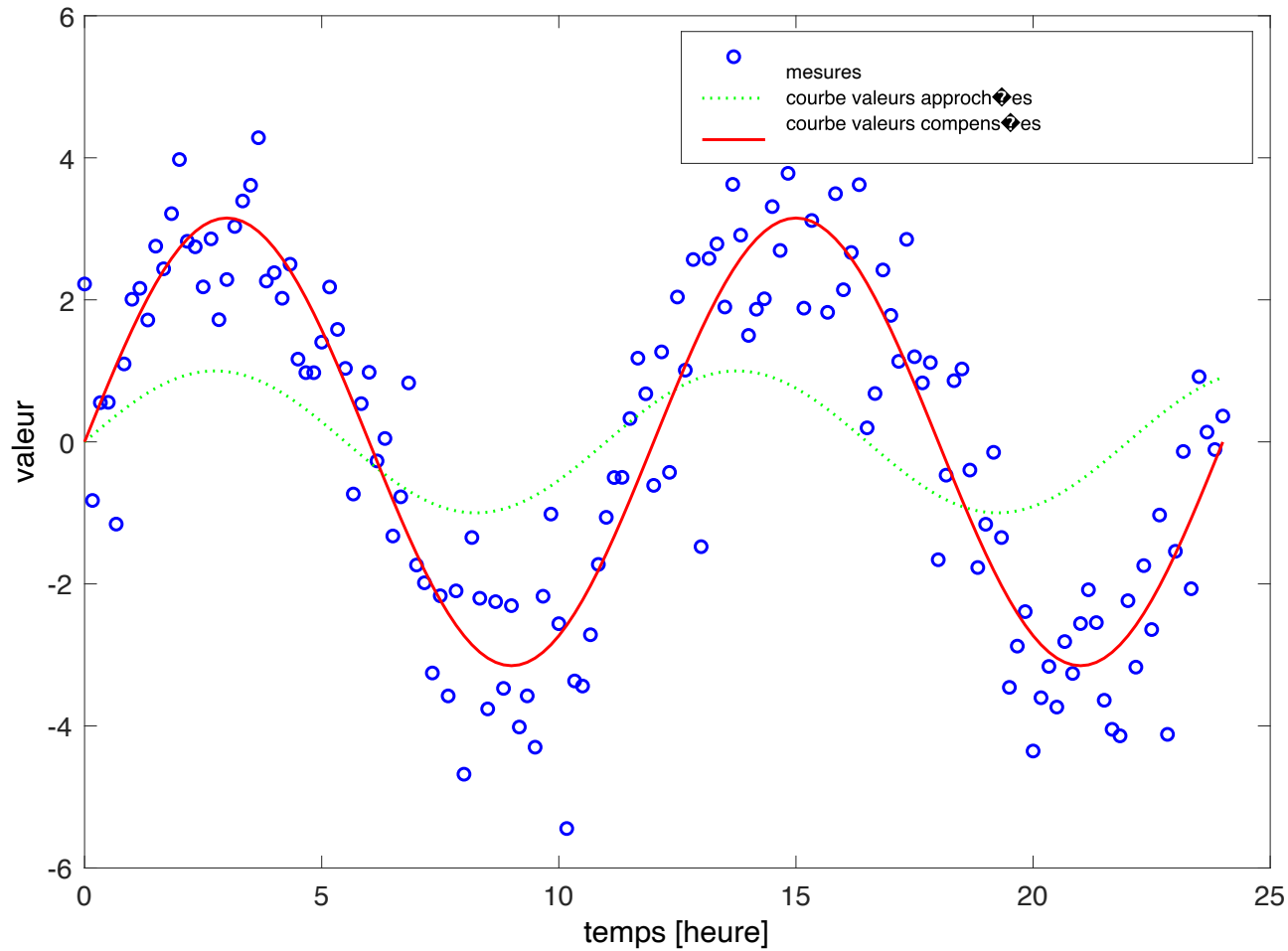


Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega t)$$

87

$\hat{\mathbf{x}} = \text{Amplitude} = 1, \text{période} = 11$



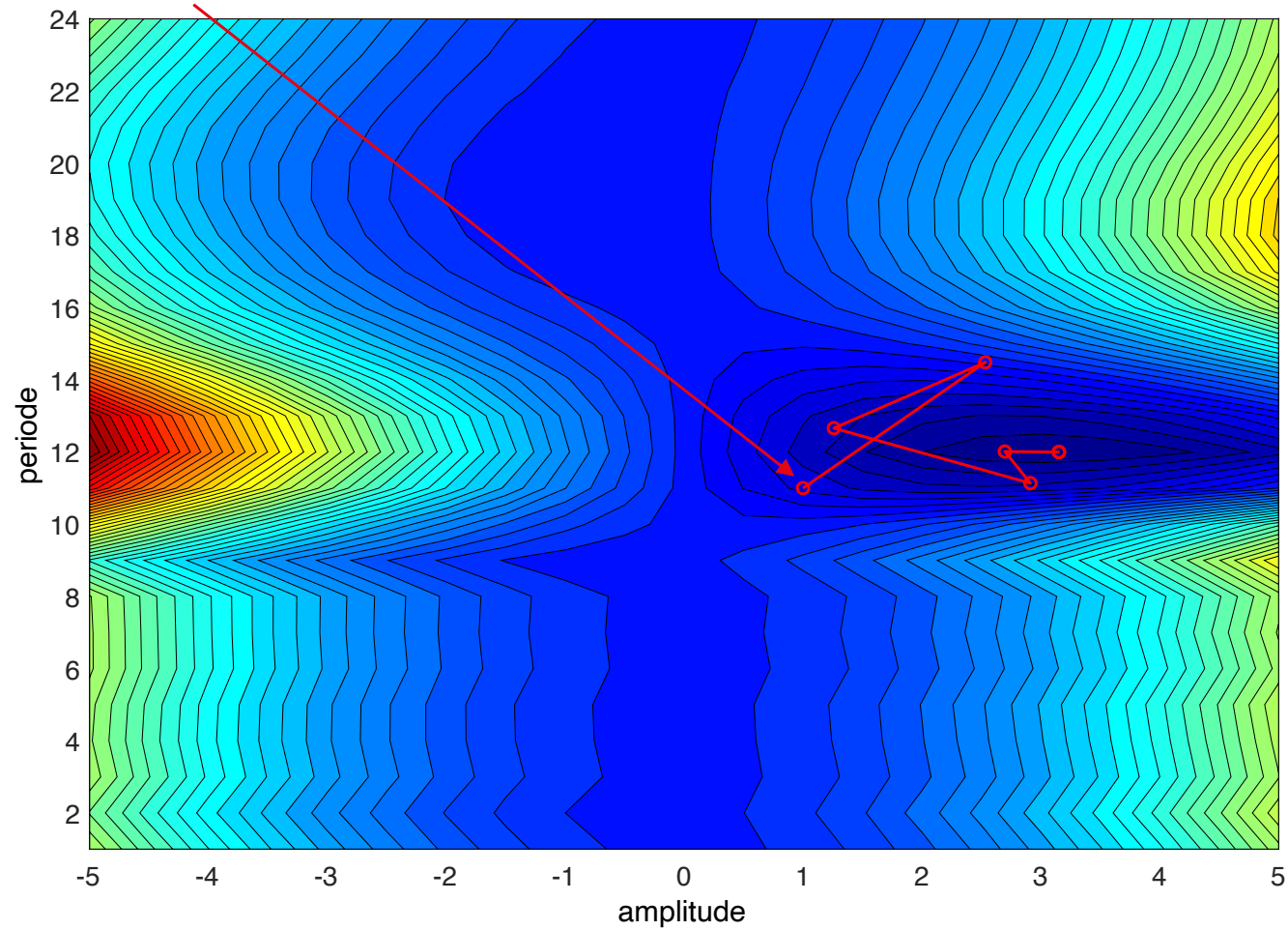
Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega t)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$$

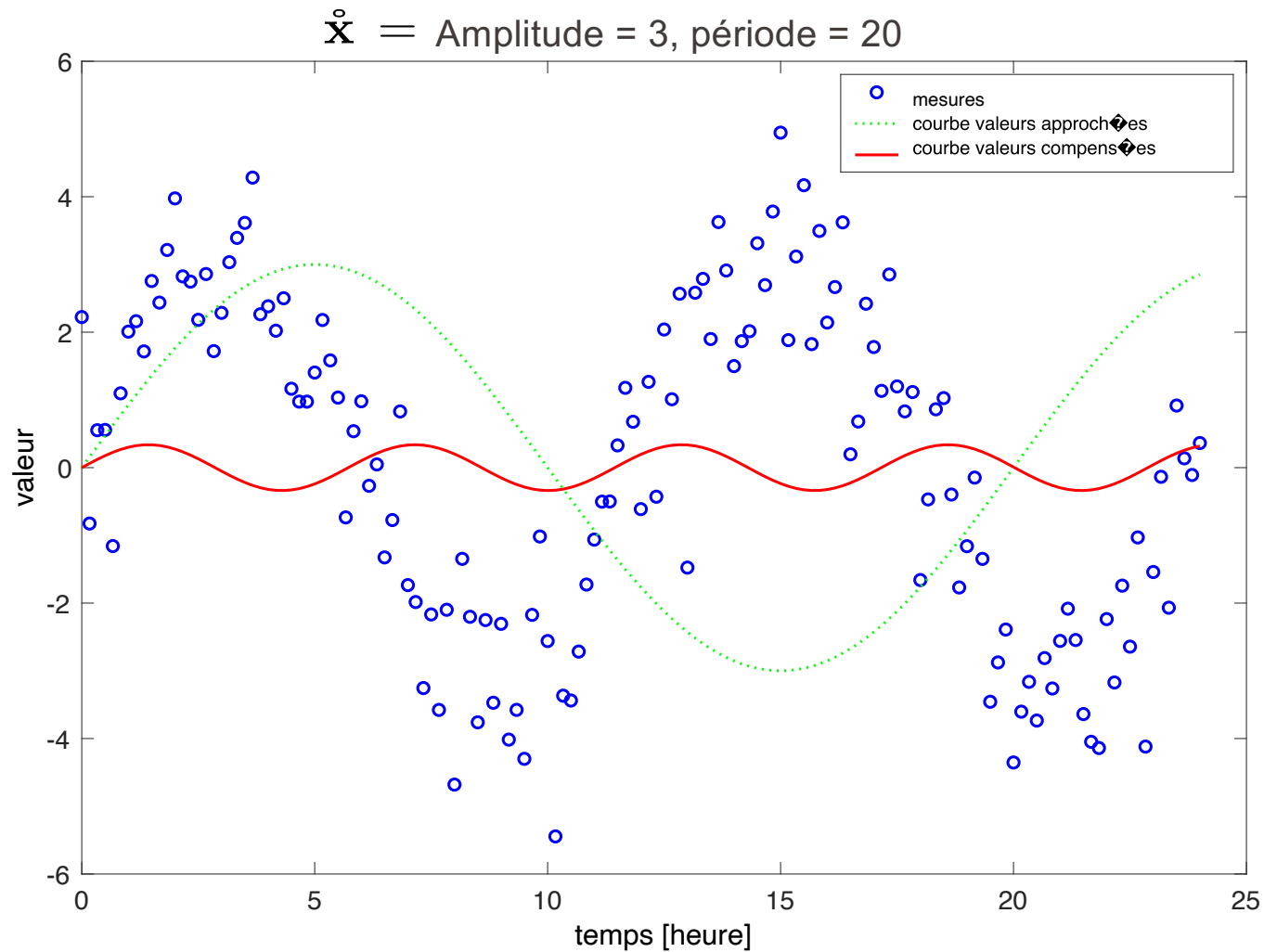
en couleur
(courbes = isolignes)

$\dot{\mathbf{x}} = \text{Amplitude} = 1, \text{période} = 11$



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega t)$$



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega t)$$

$\hat{\mathbf{x}} = \text{Amplitude} = 3, \text{période} = 20$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$$

en couleur
(courbes = isolignes)

■ Divergence

- No itération!
- dx oscille!
- dx large !

